12/05/16

Τετραγωνικές Μορφές

π.χ. $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 7x_2^2$

πίνακας $(q) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ συμμετρικός

Έστω $q : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή,

$A =$ πίνακας $(q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός

(Άρα $q(x) = Tr(x^t A x) \in \mathbb{R}$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$)

Έστω $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος. Ορίζουμε $q' : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$

με $q'(Z) = q(P\cdot Z)$ για $Z \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Τότε q' επίσης τετραγωνική μορφή και ο

$\boxed{\text{πίνακας}(q') = P^t A P}$ $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός

(γιατί $q'(Z) = q(PZ) = Tr((PZ)^t A (PZ))$

$= Tr(Z^t (P^t A P) Z))$

Ερώτημα

Υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος με $P^t A P$ διαγώνιο;

(Διαγωνιοποίηση: Δοθέντος A, μελετούμε $Q^{-1} A Q$ για $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος.

(Ορθογώνια διαγωνιοποίηση: Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός το "Φασματικό Θεώρημα" λέει ότι υπάρχει Q

ορθογώνιος με $Q^{-1}AQ$ = διαγώνιος, Άρα Q ορθογώνιος

$Q^{-1} = Q^t$. Άρα η (1) γίνεται Q^tAQ = διαγώνιος

Αυτό που θέλουμε!

<u>Πορίσμα</u>

<u>Απάντηση</u>: Ναι

<u>Ερώτημα</u>: ποιος είναι ο P;

<u>Απάντηση</u>: Έχουμε δει ότι αν A συμμετρικός υπάρχει P ορθογώνιος με $P^{-1}AP$ = διαγώνιος

Άρα P^tAP = διαγώνιος

<u>Ερώτημα</u>: Ξέρουμε να υπολογίσουμε τον P, αν μας δοθεί ο A;

<u>Απάντηση</u>: Ναι τα κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο!

<u>Ερώτημα/Συμπέρασμα</u>

Αν δοθεί τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$, θέτουμε A = πίνακας$(q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός

Υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος με $P^{-1}AP$ = διαγώνιος

<u>Ορισμός</u>

Έστω e_i η i-στήλη του P. Λέμε ότι η ακολουθία $e_1, e_2, \ldots, e_n$ είναι οι "κύριοι άξονες" της q.

Τότε αν ορίσουμε $q' : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ με

$$q'\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = q\left(P \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right)$$

Έχουμε ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$q'\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2$$

και λέμε ότι q' αναγωγή της q σε κύριους άξονες.

Ποια είναι τα λ_i;

Οι ιδιοτιμές του A

Π.χ

$q : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}$, με $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 2x_1x_2$: τετραγωνική μορφή.

Θέτουμε $A =$ πίνακας (q)

Άρα $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ συμμετρικός

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$

Ψάχνουμε ορθογώνιο $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ιδιοχώροι

$$V_A(-1) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : (A - (-1)I_2)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : \begin{cases} y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 + y_2 = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{g_1} \right\rangle$$

Βάση του $V_A(-1)$ θέλουμε ορθοκανονική. Θέτουμε

$$e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε $V_A(\lambda_2) = V_A(1)$

Βρίσκουμε ότι το $e_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ορθοκανονική βάση του $V_A(\lambda_2)$

Άρα 1) Οι κύριοι άξονες της q είναι (e_1, e_2)

2) $P = [e_1 \mid e_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ορθογώνιος

3) Αν ορίσουμε $q' : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}$ με

$q'\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = q\left(P \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$ έχουμε

$q'\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = -z_1^2 + z_2^2$

Η q' λέγεται ΑΝΑΓΩΓΗ της q σε κύριους άξονες.

<u>Παρατήρηση</u>

Αφού P ορθογώνιος οι κύριοι άξονες είναι ορθοκανονική βάση

Ορισμός

Έστω $q : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ τετραγ. μορφή. Η q λέγεται Θετικά Ορισμένη αν ο πίνακας(q) είναι θετικά ορισμένος.
Η q λέγεται Αρνητικά αν ο πίνακας(q) είναι αρνητικά ορισμένος.

Ορισμός

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός.
Ο A λέγεται θετικά ορισμένος αν κάθε ιδιοτιμή του A είναι Θετική. Ο A λέγεται Αρνητικά Ορισμένος αν κάθε ιδιοτιμή του A είναι αρνητική.

π.χ

Ο $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος, γιατί είναι συμμετρικός με θετικές ιδιοτιμές

Ο $\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ " αρνητικά " "
" " αρνητικές "

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές -1 και 1. Άρα δεν είναι θετικά ορισμένος (γιατί $-1 < 0$). Επίσης <u>δεν</u> είναι αρνητικά ορισμένος (γιατί $1 > 0$)

Συμπεριφορά. Υπάρχουν πραγματικοί συμμετρικοί πίνακες που δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικοί ορισμένοι.

~~Παρατήρηση~~

Ερώτημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός με $\chi_A(x) \in \mathbb{R}[x]$
Γενικά μπορεί να μην είναι εύκολο να βρούμε τις ιδιοτιμές του A δηλ. τις ρίζες του $\chi_A(x)$
Υπάρχει κάτι πιο εύκολο;

Πρόταση

(Πολύ εύκολος έλεγχος για θετικά/αρνητικά ορισμένους)

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός. Ορίζουμε B_i τους υποπίνακες του A που προκύπτουν από τον A κρατώντας μόνο τις πρώτες i γραμμές και στήλες του A_i $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Τ.Α.Ε.Ι.

i) A θετικά ορισμένος

ii) $\det B_i > 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n$

Τ.Α.Ε.Ι.

i) A Αρνητικά Ορισμένος

ii) $\det B_i < 0$ για i μεταξύ 1 και n περιττό ~~και~~ $\det B_i > 0$ για i μεταξύ 1 και n άρτιο.
$\in \mathbb{R}^{i \times i}$

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ Τότε $B_1 = [0] = O_{1 \times 1}$
$\det B_1 = 0$ Άρα κανο

πρόταση A όχι θετικά ~~και~~ ή αρνητικά ορισμένος

π.χ ②

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$ συμμετρικός

$\det B_1 = \det[-3] = -3 < 0$

~~det~~ $\det B_2 = \det\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -3 < 0$

- Είναι ο A θετικά ορισμένος;
~~Θετ~~ Δεν είναι γιατί η ορίζουσα $(\det B_1)$ ~~δεν είναι θετική~~ δεν είναι θετική.
- Είναι ο A αρνητικά ορισμένος; όχι γιατί $\det B_2 < 0$

~~Απόδειξη~~

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)
Έστω $q: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ τετρ. μορφή
Τ.Α.Ε.Ι i) q θετικά ορισμένη
ii) Για κάθε $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ με $X \neq \mathbb{O}_{n\times 1}$ έχουμε $q(X) > 0$
Επίσης
Τ.Α.Ε.Ι
i) q αρνητικά ορισμένη
ii) Για κάθε $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ με $X \neq \mathbb{O}_{n\times 1}$ έχουμε $q(X) < 0$

Παρατήρηση

Στη σύγχρονη φυσική, ίσως η πιο σημαντική τετραγωνική μορφή είναι η

$$q: \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R},\ q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

(Θεωρία Σχετικότητας)

Έχουμε Πίνακας $(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ με ιδιοτιμές $1, 1, 1, -1$

είναι θετικά ορισμένη: όχι όχι ~~[illegible]~~ αρνητικές ιδιοτιμές

" αρνητικά " : " "

θετικές ιδιοτιμές

ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη.

Ερώτημα

Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικοί. Πότε υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος ώστε $A = P^t B P$;

(Με άλλα λόγια, αν $q: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$, $\tilde{q}: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ με $q(x) = Tr(x^t A x)$, $\tilde{q}(x) = Tr(x^t B x)$ οι δύο τετραγωνικές μορφές που ορίζουν οι A και B. Πότε μπορούμε να πάμε από την q στην $\tilde{q}$ "με αλλαγή μεταβλητών")

Πρόταση

(Θ. δείκτου Sylvester) (χωρίς απόδειξη)

Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικοί ΤΑΕΙ

i) Υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A = P^t B P$.
ii) # αρνητικών ιδιοτιμών του A =
= # αρνητικών ιδιοτιμών του B και
μηδενικών ιδιοτιμών του A =
= # μηδενικών ιδιοτιμών του B και
θετικών ιδιοτιμών του A =
= # θετικών ιδιοτιμών του B

π.χ

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ιδιοτιμές του A 1, 1, 1, -1
Ιδιοτιμές του B 1, 1, 1, 1
Άρα ο A έχει 1 αρνητική ιδιοτιμή ο B έχει 0 αρνητικές ιδιοτιμές. Απ το Θ. Sylvester => Δεν υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ αντιστρέψιμος με $A = P^t B P$.

Άρα η τετραγωνική μορφή ~~[illegible]~~

$$q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$ Δεν μπορεί

με αλλαγή μεταβλητών να γίνει

$$\bar{q}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές A : $-1, 1$

Ιδιοτιμές B : $-7, 9$

Ο ~~Α~~ πίνακας A έχει μια αρνητική, ο μηδενικές και μία ~~..~~ θετική, ο πίνακας B το ίδιο. Επομένως $\exists$ αντιστρέψιμος ~~.....~~ P ώστε $A = P^t B P$ από το Θ. Sylvester

Πώς βρίσκουμε τον P με $A = P^t B P$;

Απάντ: Όπως προηγουμένως βρίσκουμε $Q \in \mathbb{R}^{2\times2}$ ορθογώνιο με $Q^t A Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}$ (1)

Θέτουμε $\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ Τότε $\tilde{Q}$ συμμετρικός

και $\tilde{Q}^t B \tilde{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}$ (άμεσο) (2)

(1)+(2) $\Rightarrow Q^t A Q = \tilde{Q}^t B \tilde{Q} \Rightarrow A = Q \tilde{Q}^t B \tilde{Q} Q^{-1} =$

$= P^t B P$ όπου $P = \tilde{Q} Q^{-1}$

Εύρεση του P έχει δύο στάδια το πρώτο είναι η ορθογώνια διαγωνοποίηση τα A και B και το δεύτερο είναι πολ/μος με τον $\tilde{Q}$

ΦΛ 7 Άσκηση 2

Τ: έχουμε κάνει

Άσκηση 6

Για Ασκήσεις

users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

Έστω A = πίνακας(q) = $\begin{bmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Υπολογίζουμε

$\chi_A(x) = \dots = (x-3)(x-5)(x-10)$. Επομένως Ιδιοτιμές A = 3, 5, 10

Επειδή κάθε ιδιοτιμή θετική ο A είναι θετικά ορισμένος.

(Άρα ξέρουμε ότι υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ορθογώνιος ώστε αν θέσουμε $q'(z) = q(Pz)$

Έχουμε $q'\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 =$

$= 3z_1^2 + 5z_2^2 + 10z_3^2$

Αναγωγή της q σε κύριους άξονες

Εύρεση κυρίων αξόνων

Ιδιόχωρος $V_A(\lambda_1) = V_A(3)$ Μετά τις πράξεις βρίσκουμε $V_A(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ με ορθοκανονική βάση $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_A(\lambda_2) = V_A(5)$ Μετά τις πράξεις βρίσκουμε $V_A(5) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ με ορθοκανονική βάση $e_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_A(10)$ Μετά τις πράξεις έχει ορθοκανονική βάση $e_3 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right)^t$ Άρα οι κύριοι άξονες της q είναι (e_1, e_2, e_3)